

# EINE ANWENDUNG DER ÄHNLICHKEITSLEHRE AUF DIE BERECHNUNG VON NICHTSTATIONÄREN WÄRMELEITVORGÄNGEN

S. TRAUSTEL\*

Lehrstuhl für Wärmewirtschaft und Ofenbau an der Bergakademie Clausthal

(Received 1 March 1963)

**Zusammenfassung**—Für die Wärmeleitung in einem halbunendlichen Körper, dessen Begrenzungsebene eine linear mit der Zeit steigende Temperatur hat, wird mit Hilfe der Ähnlichkeitslehre eine Lösung abgeleitet. Diese Lösung ist bereits bekannt [2]. Es handelt sich lediglich um die Demonstration der Vereinfachung der Behandlung durch Anwendung der Ähnlichkeitslehre. Neben der exakten Lösung wird eine neue Näherungslösung für technische Zwecke angegeben. Auf Möglichkeiten, das Aufheizprogramm zu variieren und auch Vorgänge in Platten von endlicher Dicke zu berechnen, wird hingewiesen.

## DIE AUFGABE

Die Wände, Decken und Böden der Industrieöfen sind oft plattenähnliche Gebilde. Bei intermittierend betriebenen Öfen steigt und fällt die Temperatur der Innenseite dieser Wände nach einem Zeitprogramm. Für die Berechnung solcher Öfen ist es wichtig, zu wissen, wieviel Wärme dabei aus dem Ofenraum in die Wände, oder umgekehrt, fließt.

Zur Schaffung eines Ansatzes wird zunächst keine Platte von endlicher Dicke betrachtet, sondern ein sogenannter halbunendlicher Körper, dessen einzige Begrenzung eine Ebene ist. Als Aufheizprogramm der Begrenzungsebene wird der einfachste Fall des linearen Temperaturanstieges mit der Zeit angenommen.

## DER LÖSUNGSWEG

Verschiedene Lösungswege können eingeschlagen werden. Man kann von den allgemeinen Differentialgleichungen der Wärmeleitung ausgehen, wie sie z.B. von Grigull [1] angegeben werden, und durch Einführung von passenden Randbedingungen zu einer Differentialgleichung für den speziellen Fall gelangen. Oder man kann nach Carslaw und Jaeger [2] den speziellen

Fall durch Zuschnitt vorliegender allgemeiner Lösungen beschreiben.

Hier soll ein anderer Weg gezeigt werden, und zwar der der Anwendung der Ähnlichkeitslehre in ihrer Eigenschaft als Mittel zur Verringerung der Anzahl der Variablen durch Umstellung der Gleichungen von der dimensionsbehafteten Schreibweise auf die dimensionslose.

## DIE GLEICHUNG DES PROBLEMS

Der betrachtete halbunendliche Körper habe folgende Eigenschaften:

$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	Massendichte,
$c$ [kcal/kg grad]	spezifische Wärme,
$\lambda$ [kcal/m h grad]	Wärmeleitfähigkeit,
$a = \lambda/c\rho$ [m <sup>2</sup> /h]	Temperaturleitfähigkeit.

Der Parameter der Betriebsweise sei:

$w$ [grad/h]	Temperatur-Anstiegsgeschwindigkeit an der Begrenzungsebene.
--------------	---

Die Variablen sind:

$x$ [m]	senkrechte Entfernung eines Punktes im Inneren des Körpers von der Begrenzungsebene,
$t$ [h]	Zeit,

\* Unter Mitarbeit von P. J. Jacob, W. Heyner (Lehrstuhl für Wärmewirtschaft und Ofenbau) und H. E. Lahmann (Institut für angewandte Mathematik).

$\vartheta$  [grad] Temperatur im Punkt  $x$  zur Zeit  $t$ .

Die aufgezählten Grössen stehen miteinander in einem kausalen Zusammenhang. Dafür kann man schreiben:

$$F_1(\rho, c, \lambda, w, x, t, \vartheta) = 0. \quad (1)$$

Dies ist die „Gleichung des Problems“.  $F_1$  ist eine Funktion mit 7 dimensionsbehafteten Argumenten. Jede physikalisch mathematische Gleichung, wenn sie im Sinne der Dimensionslehre richtig ist, lässt sich so schreiben, dass dimensionslose Ausdrücke entstehen. Man muss hierzu nur die dimensionsbehafteten Argumente entsprechend zu Potenzprodukten gruppieren. Im betrachteten Falle läßt sich der durch Gl. (1) zum Ausdruck gebrachte Zusammenhang z.B. wie folgt schreiben:

$$F_2 \left[ \frac{x}{\sqrt{(at)}}, \frac{\vartheta}{wt} \right] = 0 \quad (2)$$

oder auch

$$\frac{\vartheta}{wt} = F_3 \left[ \frac{x}{\sqrt{(at)}} \right]. \quad (3)$$

Nach dieser Umformung treten in den Gl. (2) und (3) nur noch 2 dimensionslose Argumente [ $\vartheta/wt$  und  $x/\sqrt{(at)}$ ] auf. Daraus folgt, dass die Lösung, im Koordinatensystem  $\vartheta/wt$ ,  $x/\sqrt{(at)}$  dargestellt, eine einzige Universalkurve ergeben muss. Schreibt man zur Abkürzung

$$u = \frac{x}{\sqrt{(at)}} \quad (4)$$

$$v = \frac{\vartheta}{wt} \quad (5)$$

dann lautet Gl. (3):

$$v = v(u). \quad (6)$$

#### DIE DIFFERENTIALGLEICHUNG

Neben den Gl. (4), (5), (6) gilt die Fouriersche Differentialgleichung der Wärmeleitung. Für den betrachteten eindimensionalen Fall lautet sie

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}. \quad (7)$$

Die in Gl. (7) auftretenden Differentialquotienten erhält man durch Differentiation der Gl. (4) und (5). Damit ergibt sich die folgende Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 v}{du^2} + \frac{u}{2} \frac{dv}{du} - v = 0. \quad (8)$$

Die Randbedingungen sind:

$$u = 0; \quad v = 1$$

und

$$u \rightarrow \infty; \quad v = 0.$$

#### Die Lösung

Die Differentialgleichung (8) lässt sich lösen, indem man sie z.B. durch Substitution in die von Kamke [3] angegebene Form 2.43 und durch eine weitere Substitution in die Form 2.41 bringt und die Lösung nach einer Reihe entwickelt. Das Ergebnis lautet:

$$v = 1 + \frac{u^2}{2} + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (u/2)^{2n+1}}{(4n^2 - 1) n!} \quad (9)$$

Diese Funktion ist mit dem Gausschen Fehlerintegral

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-z^2} dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1) n!} \quad (10)$$

verwandt. Man bildet die Funktion  $\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z)$ , integriert sie, bildet die Funktion  $i_1 \operatorname{erfc}(z) = 1/\sqrt{\pi} - \int_0^z \operatorname{erfc}(z) dz$ , integriert abermals und bildet die Funktion  $i_2 \operatorname{erfc}(z) = 1/4 - \int_0^z i_1 \operatorname{erfc}(z) dz$ . Die Funktion

$$v = 4i_2 \operatorname{erfc}(u/2) \quad (11)$$

ist mit der in Gl. (9) angegebenen identisch. Damit stimmt die Lösung nach Gl. (9) mit der von Carslaw und Jaeger [2] angegebenen überein.

Nach Gl. (9) berechnete Zahlenwerte sind in der Zahlentafel 1 angegeben. Bild 1 zeigt die grafische Darstellung.

Zahlentafel 1. Zahlenwerte der Funktion nach Gl. (9)

<i>u</i>	<i>v</i>	<i>u</i>	<i>v</i>
0,00	1,00000	2,90	0,00993
0,05	0,94482	2,95	0,00893
0,10	0,89207	3,00	0,00803
0,15	0,84168	3,05	0,00721
0,20	0,79357	3,10	0,00646
0,25	0,74769	3,15	0,00579
0,30	0,70395	3,20	0,00518
0,35	0,66230	3,25	0,00463
0,40	0,62265	3,30	0,00414
0,45	0,58495	3,35	0,00369
0,50	0,54913	3,40	0,00329
0,55	0,51511	3,45	0,00293
0,60	0,48284	3,50	0,00261
0,65	0,45225	3,55	0,00232
0,70	0,42327	3,60	0,00206
0,75	0,39584	3,65	0,00183
0,80	0,36991	3,70	0,00162
0,85	0,34540	3,75	0,00143
0,90	0,32226	3,80	0,00127
0,95	0,30043	3,85	0,00112
1,00	0,27986	3,90	0,00099
1,05	0,26049	3,95	0,00087
1,10	0,24226	4,00	0,00077
1,15	0,22512	4,05	0,00067
1,20	0,20902	4,10	0,00059
1,25	0,19391	4,15	0,00052
1,30	0,17975	4,20	0,00046
1,35	0,16648	4,25	0,00040
1,40	0,15406	4,30	0,00035
1,45	0,14245	4,35	0,00031
1,50	0,13160	4,40	0,00027
1,55	0,12147	4,45	0,00023
1,60	0,11202	4,50	0,00020
1,65	0,10322	4,55	0,00018
1,70	0,09503	4,60	0,00015
1,75	0,08741	4,65	0,00013
1,80	0,08033	4,70	0,00012
1,85	0,07376	4,75	0,00010
1,90	0,06766	4,80	0,00009
1,95	0,06202	4,85	0,00007
2,00	0,05679	4,90	0,00006
2,05	0,05196	4,95	0,00006
2,10	0,04749	5,00	0,00005
2,15	0,04337	5,05	0,00004
2,20	0,03957	5,10	0,00004
2,25	0,03607	5,15	0,00003
2,30	0,03285	5,20	0,00003
2,35	0,02989	5,25	0,00002
2,40	0,02717	5,30	0,00002
2,45	0,02467	5,35	0,00002
2,50	0,02239	5,40	0,00001
2,55	0,02029	5,45	0,00001
2,60	0,01837	5,50	0,00001
2,65	0,01662	5,55	0,00001
2,70	0,01503	5,60	0,00001
2,75	0,01357	5,65	0,00001
2,80	0,01224	5,70	0,00001
2,85	0,01103	5,75	0,00000

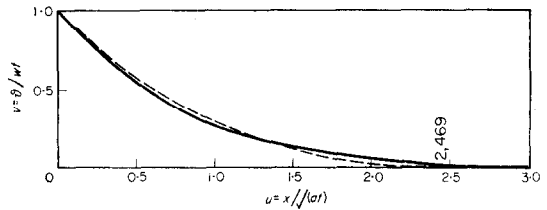


BILD 1. Grafische Darstellung der Gl. (9) (ausgezogen) und Gl. (17) (gestrichelt).

Für technische Berechnungen wichtig ist das Temperaturgefälle  $(d\vartheta/dx)_0$  an der Begrenzungsebene, d.h. bei  $x = 0$ . Nach Gl. (9) ist

$$\left(\frac{dv}{du}\right)_0 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} = -1,1284. \quad (12)$$

Andererseits ist nach Gl. (4) und (5):

$$\frac{d\vartheta}{dx} = w \sqrt{\left(\frac{t}{a}\right)} \cdot \frac{dv}{du}. \quad (13)$$

Aus Gl. (12) und (13) folgt:

$$\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_0 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} w \sqrt{\left(\frac{t}{a}\right)}. \quad (14)$$

Damit ist die Wärmeflussdichte  $q_0$  an der Begrenzungsebene:

$$q_0 = -\lambda \left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} w \sqrt{(\lambda c \rho t)}. \quad (15)$$

**EINE NÄHERUNGSLÖSUNG**

Für technische Zwecke ist es wünschenswert, neben der exakten aber etwas schwerfälligen auch über eine einfache, wenn auch nicht ganz genaue Näherungslösung zu verfügen. Diese Lösung soll folgenden Anforderungen genügen:

Der für den Wärmefluss an der Stelle  $x = 0$  massgebende Differentialquotient  $(dv/du)_0$  ist in Gl. (12) angegeben. Das für die im Körper gespeicherte Wärmemenge massgebende Integral ergibt sich aus der genauen Lösung zu

$$\int_0^\infty v du = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} = 0,7523. \quad (16)$$

Die Werte nach Gl. (12) und Gl. (16) sollen auch für die Näherungslösung *genau* zutreffen. Diesen Anforderungen genügt folgende Gleichung:

$$v = 1 - 1,1284 u + 0,4361 u^{1,5599}. \quad (17)$$

Von der Potenzreihe in Gl. (9) ist hier nur das erste Glied der Summe übernommen. Der Rest ist annähernd durch eine Bruchpotenz von  $u$  ersetzt. Zum Vergleich mit der exakten Lösung ist auch Gl. (17) in Bild 1 grafisch dargestellt.

Nach Gl. (17) hat  $v$  bei  $u = 2,4690$  eine Nullstelle mit waagerechter Tangente. Mit  $u$  nach Gl. (4) ergibt sich daraus für die Eindringtiefe  $x$  der „Temperaturfront“ in Abhängigkeit von der Zeit  $t$ :

$$x = 2,4690 \cdot \sqrt{at}. \quad (18)$$

Die Temperatur an dieser Stelle ist nur annähernd gleich null. Nach der exakten Lösung beträgt sie dort schon rd. 2,4% der Temperatur an der Begrenzungsebene.

#### VERÄNDERLICHES AUFHEIZPROGRAMM

Wärmeleitvorgänge können einander superponiert werden. Davon kann man Gebrauch machen, wenn man die Temperaturanstiegsgeschwindigkeit  $w$  nach Programm ändert, was z.B. bei keramischen Brennprozessen der Fall ist. Dabei kann man folgendermassen rechnen:

Von der Zeit  $t = 0$  an bis zur Zeit  $t = t_1$  steigt die Temperatur  $\vartheta_0$  von  $\vartheta_0 = 0$  an mit einer Geschwindigkeit  $w_1$ . Dieser Vorgang lässt sich nach Gl. (9) bzw. (17) und Gl. (15) berechnen, mit  $u$  und  $v$  nach Gl. (4) bzw. (5).

Von der Zeit  $t = t_1$  bis zur Zeit  $t = t_2$  soll die Temperatur-Anstiegsgeschwindigkeit den Wert  $w_2$  haben. Dann nimmt man einerseits an, dass der Vorgang mit der Aufheizgeschwindigkeit  $w_1$  unverändert weiter läuft. Dem überlagert man einen weiteren Vorgang, bei dem der Temperaturanstieg an der Begrenzungsebene mit der Geschwindigkeit  $(w_2 - w_1)$  vor sich geht. Die Zeit als Argument bei der Berechnung dieses Vorganges ist mit  $(t - t_1)$  einzusetzen.

Finden noch weitere Geschwindigkeitsänderungen statt, dann sind nach Bedarf weitere Vorgänge zu überlagern, bei denen  $w$  auch negativ sein kann. So kann man Vorgänge verfolgen, bei denen die Temperatur im Inneren eines intermittierend betriebenen Ofens z.B. zuerst langsam, dann schneller ansteigt, später eine gewisse Zeit auf bestimmter Höhe gehalten und schliesslich wieder gesenkt wird.

#### PLATTEN VON ENDLICHER DICKE

Ofenwände sind keine Körper von unendlicher Tiefe, sondern Platten von endlicher Dicke. Das spielt dann keine Rolle, wenn die Zeit bei einem betrachteten Vorgang so kurz ist, dass die Temperaturfront noch nicht bis zur anderen Begrenzungsebene der Platte vordringt. Bei länger dauernden Vorgängen kann die endliche Dicke der Platte dadurch berücksichtigt werden, dass man Vorgänge, die in halbenendlichen Körpern stattfinden, in geeigneter Weise einander überlagert. Mit solchen Vorgängen hat sich Leitner [4] ausführlich beschäftigt.

Hier sei nur ein Beispiel herangezogen. Es handle sich um eine Platte von der Stärke  $s$ . An der einen Seite der Platte ( $x = 0$ ) steigt die Temperatur mit der Geschwindigkeit  $w$ , während die Temperatur der anderen Seite ( $x = s$ ) konstant auf null gehalten wird. Diese Randbedingungen lassen sich einhalten, wenn man folgende Vorgänge in halbenendlichen Körpern superponiert.

	Begrenzungsebene liegt bei $x =$	Temperatur steigt mit der Geschwindigkeit	Als Ortskoordinate ist in die Gl. (9) bzw. (17) einzusetzen
(1)	0	$w$	$x$
(2)	$2s$	$w$	$2s - x$
(3)	$2s$	$-w$	$2s + x$
(4)	$4s$	$w$	$4s - x$
(5)	$4s$	$w$	$4s + x$

usw. Je längere Zeit der Vorgang andauert, d.h. je grösser die Eindringtiefe nach Gl. (18) wird, desto mehr Teilvorgänge müssen superponiert werden.

#### LITERATUR

1. U. GRIGULL, *Die Grundgesetze der Wärmeübertragung*, Gröber/Erk, Berlin (1955).
2. H. S. CARLSLAW und J. C. JAEGER, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford (1959).
3. E. KAMKE, *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen*. Bd. 1, Leipzig (1944).
4. A. LEITNER, *Nichtstationäre Wärmeleitung*, Allgemeine Wärmetechnik 7, S. 75/82, 112/121 (1956).
5. K.-O. BORCHERS, *Über den Wärmefluss in Wänden von Industrieöfen*, Dissertation, TH Aachen (1959).

6. G. RIBAUD. *Conduction de la chaleur en regime variable*. Paris (1960). *Wärmespannungen bei linearen Aufheiz- und Abkühlvorgängen*. *Z. Ver. Dtsch. Ing.* **104**, S. 203/206 (1962).
7. L. BÖSWIRTH. *Eine dimensionslose Kenngrösse für*

**Abstract**—Applying the theory of similarity, a solution is derived for the conduction of heat in a semi-infinite body, in which the temperature of the limiting surface is a linear function of time. This solution is already known [2]. This treatise demonstrates the simplification of the treatment applying the theory of similarity. For technical purposes a novel approximation to the exact solution is given. A possibility is indicated to vary the time schedule of the surface-temperature, and to compute the temperature in bodies of finite thickness.

**Résumé**—L'application d'une loi de similitude permet de trouver une solution pour la conduction thermique dans un corps semi-infini, la température de la surface limite étant une fonction linéaire du temps. Cette solution est déjà connue [2]. L'étude montre la simplification du calcul apportée par l'application de la loi de similitude. Une approximation récente de la solution exacte pour des problèmes techniques est exposée. Un moyen de tenir compte de l'évolution en fonction du temps de la température de surface et de calculer la température dans des corps d'épaisseur finie est indiqué.

**Аннотация**—С помощью теории подобия выводится решение теплопроводности в полубесконечном теле, в котором температура ограничивающей поверхности есть линейная функция времени. Решение это уже известно в литературе [2]. В статье приводится упрощение этого метода с помощью теории подобия. Дается новое приближение к точному решению, используемое в технических расчетах. Показана возможность изменения программы нагрева поверхности, а также расчета температуры в телах конечной толщины.